数理解析研究所講究録
924巻 1995年 74-87

伊吹山-斎藤理論の動機など

立教大学理学部　荒川恒男

伊吹山-斎藤両氏は、この研究集会で問題となっている対称行列のなす概均質ベクトル空間の zeta 関数を Riemann zeta 関数、Eisenstein 級数の Mellin 変換として現われる Dirichlet 級数などを用いて explicit に表示した。概均質ベクトル空間の zeta 関数は難しいものだという偏見ないしは風説を打ち砕く、概均質の zeta 関数の理論の新しい展開を指針する仕事であった。ここではこの仕事の大きな動機となったであろう新谷先生の仕事の一部の紹介をする。それは Siegel 保型形式の空間の次元を Selberg 跡公式で計算しようとするとき、ある種の unipotent 元達の寄与が対称行列の概均質 zeta 関数の特殊値で記述されるという内容であった。

またこのノートの後半部では伊吹山-斎藤両氏の結果の記述に現われるある Dirichlet 級数の素性を 志村先生、Cohen 、Kohnen 、Eichler-Zagier 、Skoruppa 等により知られている結果を用いて明らかにしたい。これに関連しては、伊吹山氏によりもっと包括的かつ高度な立場からの解説があると思うのでそちらも参照して下さい。

1　Siegel 保型形式の次元公式と対称行列の zeta 関数

n 次の実 symplectic 群 $G_n := Sp_n(\mathbb{R})$ は n 次の Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}_n = \{Z = {}^tZ \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}Z > 0\}$ に自然に作用する:

$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G_n,\ Z \in \mathfrak{H}_n$ に対して

$$g\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

簡単のため保型因子を

$$J(g,Z) = \det(CZ+D)$$

と書く。$\Gamma_n := Sp_n(\mathbb{Z})$ を Siegel modular 群、$\Gamma_n(N)$ をその主合同部分群とする:

$$\Gamma_n(N) = \{\gamma \in \Gamma_n \mid \gamma \equiv 1_{2n} \bmod N\}$$

以下 $n \geq 2$ とする。$\mathfrak{M}_k(\Gamma_n(N))$ を degree n 、weight k の $\Gamma_0(N)$ に関する Siegel 保型形式の成す $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする。すなわち $\mathfrak{M}_k(\Gamma_n(N))$ は

$$f(\gamma\langle Z\rangle) = J(\gamma,Z)^k f(Z) \qquad \forall\gamma \in \Gamma_n(N)$$

を満たす $\mathfrak{H}_n$ 上の正則関数 f からなる。$\mathfrak{S}_k(\Gamma_n(N))$ を cusp forms の成す $\mathfrak{M}_k(\Gamma_n(N))$ の部分空間とする:

$$\mathfrak{S}_k(\Gamma_n(N)) = \{f \in \mathfrak{M}_k(\Gamma_n(N)) \mid (\det Y)^{k/2}|f(Z)| \text{ は } \mathfrak{H}_n \text{ 上有界}\}$$

$g \in G_n$ に対し、

$$K_{n,k}(g) := J(g, i1_n)^{-k} \det\left(\frac{g\langle i1_n\rangle + i1_n}{2i}\right)^{-k}$$

とおく。$i1_n$ は $\mathfrak{H}_n$ の特別な点である。$d_n g$ を G_n の標準的に正規化された Haar measure とする（正規化の仕方は例えば [Shn] を見よ)。Selberg の方法を用いて Godement [Go] により次の次元公式が知られている。

Theorem 1 (Godement) $k > 2n$ とする。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{S}_k(\Gamma_n(N)) = C_{n,k} \int_{\Gamma_n(N)\backslash G_n} \sum_{\gamma \in \Gamma_n(N)} K_{n,k}(g^{-1}\gamma g)\, d_n g$$

$C_{n,k}$ は正定数で n, k 及び $d_n g$ の正規化に依存する（正確には [Shn] 参照)。右辺の積分は絶対収束する。

注意) 右辺において積分 $\int$ と和 $\sum_{\gamma \in \Gamma_n(N)}$ の順序を自由には変えられないことに注意する。このことが、右辺の積分計算を実行する際に 深刻な難しさ を投げかける。

対称行列のなす概均質ベクトル空間の zeta 関数を定義しておく。
L_n^* を size n の半整数対称行列の成す格子とする。$L_n^{*(i)}$ を符号が $(i, n-i)$ である $x \in L_n^*$ の成す L_n^* の部分集合とする。

$$\zeta_i(s, L_n^*) = \sum_{x \in L_n^{*(i)}/\sim} \mu(x)|\det x|^{-s} \qquad (0 \le i \le n)$$

ここで x は $L_n^{*(i)}$ の元の $SL_n(\mathbb{Z})$-同値類の代表を渡る。$\mu(x)$ は x の density と呼ばれる量であるが、定義は他の方の稿を参照して下さい。特に

$$\xi_n^*(s) := \xi_n(s, L_n^*) = \sum_{T \in L_n^{*(n)}/\sim} \varepsilon(T)^{-1}(\det T)^{-s}$$

とおく。ここに $\varepsilon(T) = \sharp\{U \in SL_n(\mathbb{Z}) \mid {}^tUTU = T\}$ である。
L_n を size n の整数係数対称行列の成す格子とする。zeta 関数 $\zeta_i(s, L_n)$ $(0 \le i \le n)$ も同様に定義される。
$\zeta_i(s, L_n^*)$, $\zeta_i(s, L_n)$ $(0 \le i \le n)$ は $\mathrm{Re}(s) > (n+1)/2$ で絶対収束し、全 s-平面の有理型関数に解析接続され、ある関数等式を満たす（伊吹山氏の稿参照)。特に $\xi_n^*(s)$ は負の整

数点及び $s=0$ で正則である。

森田康夫氏 [Mo]、Christian [Ch] は $n=2$ の場合に $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{S}_k(\Gamma_2(N))$ $(N\geq 3)$ を Godement の公式を利用して explicit に計算した。計算の原理は $\Gamma_2(N)$ の各共役類からの寄与を計算する（Selberg）ものである。この際、$\int$ と $\sum$ の交換を正当化するのに巧妙な工夫を必要とする。[Mo] で完全な正当化が実行されたが多大な努力を要した。ここで初めて概均質の zeta 関数 $\zeta_i(s,L_2)$ $(0\leq i\leq 1)$ の $s=3/2$ での留数が、ある型の unipotent elements の寄与の計算に使われた。

新谷先生 [Shn] は一般の n の場合に次の型の unipotent elements の共役類の次元公式への寄与を巧みに計算した。そこで $0\leq r\leq n$ に対し、

$$\Pi_r := \left\{\gamma\in\Gamma_n(N)\ \middle|\ \gamma\underset{\Gamma_n}{\sim}\begin{pmatrix}1_n & x\\ 0 & 1_n\end{pmatrix},\ x\in\mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z}),\ \ \mathrm{rank}(x)=r\right\}$$

とおく。ここで $\gamma,\gamma'\in\Gamma_n(N)$ に対し $\gamma\underset{\Gamma_n}{\sim}\gamma'$ は γ と γ' が Γ_n-共役であることを意味する。Π_r の元の次元公式への寄与を計算する。そのため

$$I_n(\Pi_r,N,k):=C_{n,k}\int_{\Gamma_n(N)\backslash G_n}\sum_{\gamma\in\Pi_r}K_{n,k}(g^{-1}\gamma g)\,d_ng \qquad (0\leq r\leq n)$$

とおく。

Theorem 2 (Shintani [Shn]) $0\leq r\leq n$ とする。上記積分 $I_n(\Pi_r,N,k)$ は絶対収束し、その値は

$$I_n(\Pi_r,N,k)=\mathrm{Const}(n,k,N,r)\cdot\xi_r^*(r-n)$$

として zeta 関数 $\xi_r^*(s)$ の $s=r-n$ での特殊値で与えられる。ここで $\mathrm{Const}(n,k,N,r)$ は初等的に計算出来る正定数である。

例として $n=r=2$ のときは値 $\xi_2^*(0)$ は関数等式で zeta 関数 $\zeta_i(s,L_2)$ $(0\leq i\leq 1)$ の $s=3/2$ での留数の計算と等価であり、この留数の計算は比較的容易である。一般の n に対して典型的な $r=n$ の場合に証明の方針を与えておく。詳しくは [Shn] を参照して下さい。

定理の証明の方針） $r=n$ の場合：

Γ_n の部分群 $\Gamma_{n,\infty}$ を

$$\Gamma_{n,\infty}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_n\ \middle|\ c=0\right\}$$

とし、分解

$$\Pi_n=\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma_{n,\infty}\backslash\Gamma_n}\ \bigsqcup_{x\in L_n,\ \det x\neq 0}\gamma^{-1}\begin{pmatrix}1_n & Nx\\ 0 & 1_n\end{pmatrix}\gamma$$

を用いて、積分 $I_n(\Pi_r, N, k)$ は次の形まで書き換えられる。

$$I_n(\Pi_r, N, k) = C_{n,k}[\Gamma_n : \Gamma_n(N)] \times$$

$$\int_{\Gamma_{n,\infty}\backslash G_n} \sum_{x\in L_n,\ \det x\neq 0} K_{n,k}\left(g^{-1}\begin{pmatrix} 1_n & Nx \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\right) d_n g$$

岩沢分解

$$g = \begin{pmatrix} 1_n & u \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & {}^t h^{-1} \end{pmatrix} k \qquad u \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}),\ \ h \in GL_n^+(\mathbb{R}),\ \ k \in U(n)$$

を使って、さらに

$$I_n(\Pi_r, N, k) = \mathrm{Const} \times \int_{GL_n^+(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})} \sum_{x\in L_n,\ \det x\neq 0} \det(1_n - ihx{}^t h)^{-k} (\det h)^{n+1}\, dh$$

ここで dh は群 $GL_n^+(\mathbb{R})$ の標準的 Haar measure とする。

$$V_n(\mathbb{R}) = \{x \in M_n(\mathbb{R}) \mid x = {}^t x\}, \quad V_n^n = \{x \in V_n(\mathbb{R}) \mid x \ \text{は正定値}\ \}$$

とし、

$$f_n^*(x, k) = \det(1_n - ix)^{-k} \qquad (x \in V_n(\mathbb{R}))$$

とする。そこで

$$Z(f_n^*(x,k), L_n, s) := \int_{GL_n^+(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})} (\det h)^{2s} \sum_{x\in L_n,\ \det x\neq 0} f_n^*(hx{}^t h, k)\, dh$$

とおく。この積分は $(n-1)/2 < Re(s) < k - (n-1)/2$ で絶対収束する（このことの証明は難しい [Shn, p.55] ）。さらに $V_n(\mathbb{R})$ 上の関数 $f_n(x,k)$ を

$$f_n(x,k) = \begin{cases} (\det x)^{k-(n+1)/2} \exp(-2\pi \mathrm{tr}(x)) & \ldots \quad \text{if } x \in V_n^n \\ 0 \qquad \ldots & \qquad \text{otherwise} \end{cases}$$

とおき、積分 $Z(f_n(x,k), s)$ を次式で定義する。

$$Z(f_n(x,k), s) := \int_{GL_n^+(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})} (\det h)^{2s} \sum_{x\in L_n^*} f_n(hx{}^t h, k)\, dh$$

この積分は $\mathrm{Re}(s) > (n+1)/2$ かつ $\mathrm{Re}(k+s) > n$ で収束し、次の形をしている：

$$Z(f_n(x,k), s) = \pi^{n(n-1)/4}(2\pi)^{-(k+s-(n+1)/2)n}\gamma_n(k+s-n-1) \times \xi_n^*(s)$$

ここに $\gamma_n(s) = \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(s+1+j/2)$ である。このとき、関数等式

$$(*) \qquad Z(f_n^*(x,k), L_n, s) = \gamma_{n,k} \cdot Z(f_n(x,k), (n+1)/2 - s)$$

が成り立つ。$\gamma_{n,k}$ は計算可能な正定数である。(*) が成り立つ根拠は次の Siegel 公式である。

$$\sum_{x\in L_n} \det(1_n - ihx{}^th)^{-l} = \gamma'_{n,k} \times (\det h)^{-(n+1)} \sum_{x\in L_n^{*(n)}} (\det x)^{k-(n+1)/2} \exp(-2\pi({}^th^{-1}xh^{-1}))$$

これらより

$$Z(f_n^*(x,k), L_n, s) = (\text{ある正定数}) \times (2\pi)^{s-k}\gamma_n(k-s-(n+1)/2) \times \xi_n^*((n+1)/2-s)$$

となり、特に

$$I_n(\Pi_n, N, k) = \mathrm{Const} \times \xi_n^*(0) \qquad (\ \mathrm{Const}\ \text{はある正定数})$$

証終）

主合同部分群群 $\Gamma_n(N)$ $(N \geq 3)$ は torsion 元をもたないので次のことが民間伝承的に予想されている。

Conjecture $k > 2n,\ N \geq 3$ とする。このとき、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{S}_k(\Gamma_n(N)) = \sum_{r=0}^{n} I_n(\Pi_r, N, k)$$

予想は $n \leq 3$ まで正しい。$n=2$ は Yamazaki [Ya]（代数幾何的方法）、Morita [Mo]、Christian [Ch] の結果であり、$n=3$ の場合は Tsushima [Tsu]（代数幾何的方法）、および Hashimoto（Selberg 跡公式）による。

そこで新谷先生の定理を踏まえると、概均質の zeta 関数 $\xi_n^*(s)$ の非正整数点での値 $\xi_n^*(-m)$ $(m\in\mathbb{Z},\ m\geq 0)$ を数論的な量で explicit に計算したくなる !!! このことが伊吹山-斎藤両氏の仕事の大きな動機であると推量される。

この問題に対する一つのアプローチは $\xi_n^*(s)$ の contour 積分表示を求めることであろう。話を分かりやすくするために、$n=1$ の場合を復習しよう。$n=1$ のときは $\xi_1^*(s) = \zeta(s)$（Riemann zeta 関数）であり、よく知られているように

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)(e^{2\pi is}-1)} \int \qquad t^{s-1}\frac{1}{e^t-1}\,dt$$

という contour 積分表示を持つ。このことから $\zeta(s)$ の非正整数点での値は

$$\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n} \qquad n\in\mathbb{Z},\ n\geq 0$$

となる。B_n は Bernoulli 数である。$n=2$ の場合は $\xi_2^*(s)$ の contour 積分表示は筆者 [Ar1] により与えられている（$\xi_2^*(0)$ の値程度は計算できる）が、結果は非常に複雑で $n\geq 3$ の場合に拡張する展望はない。

2 伊吹山-斎藤の zeta 関数と Jacobi forms

この節では伊吹山-斎藤両氏の仕事に現われる興味深い zeta 関数の理解を深めるために、易しい場合（ $\delta=+1$ のとき）について、Jacobi 形式の Eisenstein 級数との関連を考察する。ここで述べることは、半整数保型形式、Jacobi 形式についての志村先生 [Shm1,2] 、Cohen [Co] 、Kohnen 、Eichler-Zagier [E-Z] 、Skoruppa [Sk] らの結果の一部を我々の目的に合わせてまとめたものである。難しい場合（ $\delta=-1$ のとき）もこめた一般的な取扱は伊吹山氏の稿を参照して下さい。

まずは記号の準備をする。
K は $\mathbb{Q}$ 上の 2 次体ないしは $K=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}$ とする。
K が 2 次体の場合には d_K は判別式、χ_K は $K/\mathbb{Q}$ に付随する Dirichlet 指標（Kronecker 指標）、$L(s,\chi_K)$ は Dirichlet L-関数とする。
$K=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}$ の場合には $d_K=1,\ \chi_K=\mathrm{trivial},\ L(s,\chi_K)=\zeta(s)$ とする。
伊吹山-斎藤両氏は次の zeta 関数を導入した（ [I-S1], [I-S2] ）。
$\delta=+1$ or $\delta=-1$ とし、n は偶数とする。

$$\begin{aligned}D_n^*(s,\delta) &:= (-1)^{[n/4]}\sum_{\delta(-1)^{n/2}d_K>0} 2(2\pi)^{-n/2}(n/2-1)!|d_K|^{(n-1)/2}L(n/2,\chi_K)\\ &\quad\times\frac{\zeta(2s)\zeta(2s-n+1)}{L(2s-n/2+1,\chi_K)}|d_K|^{-s}\end{aligned}$$

この zeta 関数を Dirichlet 級数

$$D_n^*(s,\delta)=\sum_{d=1}^{\infty} H(n/2,d;\delta)d^{-s}$$

の形に書き、その係数で $H(n/2,d;\delta)$ を定義する。さらにこの係数を利用して別の Dirichlet 級数 $D_n(s,\delta)$ を

$$D_n(s,\delta)=\sum_{d=1}^{\infty} H(n/2,4d;\delta)d^{-s}$$

で定義する。これらの Dirichlet 級数は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大なるとき絶対収束する。

以下では $\delta=+1$ の場合に $D_n^*(s,\delta)$ が Cohen の Eisenstein 級数と呼ばれる半整数 weight の保型形式の Mellin 変換として得られることを説明する。この事実から自然に $D_n^*(s,\delta)$ の解析接続や関数等式も導かれる。
都合上 $n=2k-2$ とおく（ k は weight に相当）。$\delta=+1$ の条件下では $L(s,\chi_K)$ の関数等式により

$$D_{2k-2}^*(s,+1)=\sum_{(-1)^{k-1}d_K>0} L(2-k,\chi_K)\times\frac{\zeta(2s)\zeta(2s-2k+3)}{L(2s-k+2,\chi_K)}|d_K|^{-s}$$

と書き換えられる。そこで $D \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$L_D(s) := \begin{cases} 0 & \ldots \quad D \not\equiv 0,\ 1 \bmod 4 \\ \zeta(2s-1) & \ldots \quad D = 0 \\ L(s,\chi_K)R_K(l;s) & \ldots \quad D \equiv 0,\ 1 \bmod 4 \end{cases}$$

とおく。ただし、$D \equiv 0,\ 1 \bmod 4$ の場合は、$D = d_K l^2$（d_K は基本判別式、$l \in \mathbb{Z}_{>0}$）と書くときに

$$R_K(l;s) = \sum_{d \mid l,\ d>0} \mu(d)\chi_K(d)d^{-s}\sigma_{1-2s}(l/d)$$

とする（[E-Z, p.21]）。

$$\frac{\zeta(2s)\zeta(2s-2k+3)}{L(2s-k+2,\chi_K)} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{R_K(l;2-k)}{l^{2s}}$$

に注意すると、さらに

$$D^*_{2k-2}(s;+1) = \sum_{D\in\mathbb{Z},\,(-1)^{k-1}D>0} L_D(2-k)|D|^{-s}$$

となる。従って $H(k-1,d;+1)\ (d \in \mathbb{Z}_{>0})$ は

$$H(k-1,d;+1) = L_{(-1)^{k-1}d}(2-k)$$

で与えられ、$d=0$ のときも便宜的に

$$H(k-1,0;+1) = \zeta(3-2k)$$

と定義する。$H(k-1,d;+1)\ (d \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ は Cohen 関数と呼ばれる（[Co]、[E-Z] 参照)。以下、$D^*_{2k-2}(s;+1)$ をある半整数 weight の Eisenstein 級数の Mellin 変換として表示する。これから述べることは [Shm1, 2]、[Co]、[Ko]、[E-Z]、[Sk1,2] 等の結果を我々の目的に合わせてまとめたものである。筆者の趣味で Jacobi Eisenstein 級数を表面に出して記述した。

まず Jacobi 形式の空間を定義する（[E-Z]、skew holomorphic Jacobi forms については [Sk1,2]）。$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$、$e(w) = \exp(2\pi i w)$ とおく。$m,\ k \in \mathbb{N}$ に対し、$J_{k,m}$（resp. $J^{skew}_{k,m}$）を次の (i)（resp. (i)'）、(ii)、(iii)（resp. (iii)'） を満たす $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$ 上の正則関数（resp. 実解析的関数）の成す空間とする。

(i) $$\varphi(M(\tau,z)) = e\left(\frac{mcz^2}{c\tau+d}\right)(c\tau+d)^k\varphi(\tau,z), \quad \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

resp. (i)' $$\varphi(M(\tau,z)) = e\left(\frac{mcz^2}{c\tau+d}\right)\overline{(c\tau+d)}^{k-1}|c\tau+d|\varphi(\tau,z), \quad \forall M \in \Gamma$$

(ii) $\varphi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = e(-m(\lambda^2\tau+2\lambda z))\varphi(\tau, z), \qquad \forall\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$

(iii) $\varphi(\tau, z)$ は Fourier 展開

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n,\, r\in\mathbb{Z},\, 4mn-r^2\geq 0} c(n,r)e(n\tau+rz)$$

resp. (iii)' $\varphi(\tau, z)$ は Fourier 展開

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n,\, r\in\mathbb{Z},\, 4mn-r^2\leq 0} c(n,r)e(n\overline{\tau}+\frac{i}{2}r^2\eta+rz), \qquad \eta = \mathrm{Im}\tau$$

をもつ。

ここで $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$M(\tau, z) = \left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}, \dfrac{z}{c\tau+d}\right)$ とした。

$J_{k,m}$ (resp. $J_{k,m}^{skew}$) の元を index m 、weight k の holomorphic Jacobi form (resp. skew holomorphic Jacobi form) という。次に Jacobi 形式の Eisenstein 級数を

$$E_{k,m}(\tau, z) = \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} (c\tau+d)^{-k} e\left(m\left(\lambda^2 M\langle\tau\rangle + \frac{2\lambda z}{c\tau+d} - \frac{cz^2}{c\tau+d}\right)\right)$$

$$E_{k,m}^{sk}(\tau, z) = \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \overline{(c\tau+d)}^{1-k}|c\tau+d|^{-1} e\left(m\left(\lambda^2 M\langle\tau\rangle + \frac{2\lambda z}{c\tau+d} - \frac{cz^2}{c\tau+d}\right)\right)$$

で定義する。ここで

$$\Gamma_\infty = \left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, l \in \mathbb{Z}\right\}$$

とおいた。これらの級数は $k>3$ のとき絶対収束し、$E_{k,m}(\tau, z) \in J_{k,m}$、$E_{k,m}^{sk}(\tau, z) \in J_{k,m}^{skew}$ である。Jacobi 形式の面白い点は半整数の保型形式と結びつくことである。このことの説明に入るが、

以下 $m=1$ とする。theta series を導入する。$r=0,\ 1$ に対し、

$$\theta_r(\tau, z) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} e\left(\tau\left(\lambda+\frac{r}{2}\right)^2 + z(2\lambda+r)\right)$$

とおく。このとき $\varphi \in J_{k,1}$ は

$$\varphi(\tau, z) = h_0(\tau)\theta_0(\tau, z) + h_1(\tau)\theta_1(\tau, z)$$

の形に表現される。ここで $h_0(\tau),\ h_1(\tau)$ は $\mathfrak{H}$ 上の正則関数で

$$h_r(\tau) = \sum_{n=r}^{\infty} c(n,r)e\left(\tau\left(n-\frac{r}{4}\right)\right) \qquad (r = 0 \text{ or } 1)$$

で与えられる（ $c(n,r)$ は φ の Fourier 係数）。
同様に $\varphi \in J_{k,1}^{skew}$ は

$$\varphi(\tau,z) = h_0(\tau)\theta_0(\tau,z) + h_1(\tau)\theta_1(\tau,z)$$

の形に表わされる。ここで $h_0(\tau)$, $h_1(\tau)$ は $\mathfrak{H}$ 上の歪正則関数（ anti-holomorphic ）で

$$h_r(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\le r/4} c(n,r)e\left(\overline{\tau}\left(n-\frac{r}{4}\right)\right) \qquad (r=0 \text{ or } 1)$$

で与えられる（ $c(n,r)$ は φ の Fourier 係数）。
半整数保型形式の理論は志村先生（ [Shm1,2] ）に始まるが、ここでは Modular 群 $\Gamma_0(4)$ に関する半整数 weight $k-1/2$ の良い保型形式の空間である Kohnen subspace を導入しよう（ [Ko] ）。theta 級数 $\theta(\tau)$ を

$$\theta(\tau) = \theta_0(\tau,0) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} e(\lambda^2\tau)$$

とし、保型因子 $j(M,\tau)$ $(M\in\Gamma_0(4))$ を

$$j(M,\tau) := \frac{\theta(M\langle\tau\rangle)}{\theta(\tau)} \qquad M\in\Gamma_0(4)$$

で定義する（ [Shm2] ）。Kohnen subspace $M_{k-1/2}^{+}(\Gamma_0(4))$ は次の条件 (i) 、(ii) を満たす $\mathfrak{H}$ 上の正則関数 $f(\tau)$ 達から成る：

(i) $f(M\langle\tau\rangle) = j(M,\tau)^{2k-1}f(\tau), \qquad \forall M\in\Gamma_0(4)$

(ii) $f(\tau)$ は Fourier 展開 $f(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} c(n)e(n\tau)$ を有し、Fourier 係数 $c(n)$ は

$$c(n)=0 \quad \text{unless} \quad (-1)^{k-1}n \equiv 0,\ 1 \bmod 4$$

を満たす。

このとき次の同型が成り立つ。

Theorem 3 (Kohnen, Eichler-Zagier [E-Z])

(i) k は偶数とする。このとき

$$\iota_k : J_{k,1} \simeq M_{k-1/2}^{+}(\Gamma_0(4))$$

同型 ι_k は $\varphi \longmapsto h(\tau) = h_0(4\tau) + h_1(4\tau)$ で与えられる。

(ii) k は奇数とする。このとき

$$\iota_k : J_{k,1}^{skew} \simeq M_{k-1/2}^{+}(\Gamma_0(4))$$

同型 ι_k は $\varphi \longmapsto h(\tau) = \overline{h_0(4\tau)} + \overline{h_1(4\tau)}$ で与えられる。

注意）　$M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \simeq J_{k,1} \bigoplus J^{skew}_{k,1}$ となるが、k が偶数のときは $J^{skew}_{k,1} = \{0\}$ 、k が奇数のときは $J_{k,1} = \{0\}$ である。

我々の目的に必要なものは Eisenstein 級数の Fourier 展開である。$E_{k,1}(\tau, z)$, $E^{sk}_{k,1}(\tau, z)$ の Fourier 展開を

$$E_{k,1}(\tau, z) = \sum_{r,\, n \in \mathbb{Z},\ 4n-r^2 \geq 0} e_{k,1}(n, r) e(n\tau + rz) \qquad k \text{ even } > 2$$

$$E^{sk}_{k,1}(\tau, z) = \sum_{r,\, n \in \mathbb{Z},\ 4n-r^2 \leq 0} e^{sk}_{k,1}(n, r) e(n\overline{\tau} + \frac{i}{2} r^2 \eta + rz) \qquad k \text{ odd } > 2$$

とする。$k = 3$ のときには $E^{sk}_{k,1}(\tau, z)$ は絶対収束しないが、条件収束し、その Fourier 展開は上式で与えられることに注意する。
Eichler-Zagier [E-Z, pp. 17 – 23] の中で Eisenstein 級数の Fourier 係数が explicit に計算されている。

Theorem 4 ([E-Z])

(i)　$k > 2$ は偶数とする。

$$e_{k,1}(n, r) = \begin{cases} \dfrac{L_D(2-k)}{\zeta(3-2k)} & \cdots \quad if \quad D = r^2 - 4n < 0 \\ 1 \quad \cdots & if \quad r^2 = 4n \end{cases}$$

付随的に Theorem 1 の写像 ι_k による $E_{k,1}(\tau, z)$ の像は

$$\iota_k(E_{k,1}) = 1 + \sum_{D=1}^{\infty} \frac{L_{-D}(2-k)}{\zeta(3-2k)} e(D\tau)$$

(ii)　$k > 2$ は奇数とする。

$$e^{sk}_{k,1}(n, r) = \begin{cases} \dfrac{L_D(2-k)}{\zeta(3-2k)} & \cdots \quad if \quad D = r^2 - 4n > 0 \\ 1 \quad \cdots & if \quad r^2 = 4n \end{cases}$$

付随的に Theorem 1 の写像 ι_k による $E^{sk}_{k,1}(\tau, z)$ の像は

$$\iota_k(E^{sk}_{k,1}) = 1 + \sum_{D=1}^{\infty} \frac{L_D(2-k)}{\zeta(3-2k)} e(D\tau)$$

k が奇数の場合、$e^{sk}_{k,1}(n,r)$ の explicit form は [E-Z] で与えられていないが、全く同様に計算できる。いま

$$G^+_{k-1/2}(\tau) = \sum_{d=1}^{\infty} H(k-1,d;+1)e(d\tau)$$

とおくと、$H(k-1,0;+1) = \zeta(3-2k)$ に注意すれば、

$$G^+_{k-1/2} = \zeta(3-2k) \times \begin{cases} \iota_k(E_{k,1}) & \ldots \quad k \text{ 偶数} \\ \iota_k(E^{sk}_{k,1}) & \ldots \quad k \text{ 奇数} \end{cases}$$

従って、$G^+_{k-1/2} \in M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$. これの Mellin 変換が丁度 Dirichlet 級数 $D^*_{2k-2}(s;+1)$ になる：

$$(\pi/2)^{-s}\Gamma(s)D^*_{2k-2}(s;+1) = \int_0^\infty \left(G^+_{k-1/2}\left(\frac{iy}{4}\right) - H(k-1,0;+1)\right) y^{s-1}dy$$

この積分表示を用いると $D^*_{2k-2}(s;+1)$ の解析接続と関数等式が得られる。

Theorem 5 (Ibukiyama-Saito) $k > 2$ とする。$D^*_{2k-2}(s;+1)$ は全 s 平面の有理型関数に解析接続され、関数等式

$$(\pi/2)^{-s}\Gamma(s)D^*_{2k-2}(s;+1) = \varepsilon(k)\sqrt{2}(2\pi)^{s-k+1/2}\Gamma(k-1/2-s)D_{2k-2}(k-1/2-s;+1)$$

を満たす。ここで

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} (-1)^{k/2} & \ldots \quad k \text{ 偶数} \\ (-1)^{(k-1)/2} & \ldots \quad k \text{ 奇数} \end{cases}$$

とおいた。

この定理の証明の根拠は Cohen Eisenstein 級数 $G^+_{k-1/2}$ の変換公式である。今

$$H^+_{k-1/2}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} H(k-1,4n;+1)e(n\tau)$$

とおく。このとき

$$(*) \qquad G^+_{k-1/2}\left(-\frac{1}{4\tau}\right) = \sqrt{2}e^{\pm\pi i/4}\tau^{k-1/2}H^+_{k-1/2}(\tau)$$

が成り立つ。ここで $e^{\pm\pi i/4}$ の符号は k が偶数のとき +、k が奇数のとき − である。(*) の証明の方針は以下の通り。簡単のため k は偶数とする。Eisenstein 級数 $E_{k,1}(\tau,z)$ を

$$E_{k,1}(\tau,z) = h_0(\tau)\theta_0(\tau,z) + h_1(\tau)\theta_1(\tau,z)$$

と表わすとき、例えば [E-Z], p.64, (16) 式により変換公式

$$h_0\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1+i}{2}\tau^{k-1/2}\big(h_0(\tau)+h_1(\tau)\big)$$
$$h_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1+i}{2}\tau^{k-1/2}\big(h_0(\tau)-h_1(\tau)\big)$$

が成立。$G^+_{k-1/2}(\tau)=\zeta(3-2k)(h_0(4\tau)+h_1(4\tau))$ および
$H^+_{k-1/2}(\tau)=\zeta(3-2k)h_0(\tau)$ に注意すると

$$\begin{aligned} G^+_{k-1/2}\left(-\frac{1}{4\tau}\right) &= \zeta(3-2k)\left(h_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)+h_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right) \\ &= (1+i)\tau^{k-1/2}\zeta(3-2k)h_0(\tau) \end{aligned}$$

これより変換公式 (*) が得られる。

注意） $\delta=-1$ および $k=2$ の場合は取扱が難しく、実解析的 Eisenstein 級数の Fourier 展開が必要のようである。この部分は伊吹山-斎藤両氏の original な仕事であり、伊吹山氏の稿を参照して下さい。

最後に例を述べて終わりとします。

例 1 Q_8 を 8 行 8 列の半整数正定値対称行列で $\det(2Q_8)=1$ 、最終行最終列の成分 ($(8,8)$ 成分) が 1 のものとする（かかる Q_8 は存在する。例えば Serre の数論講義、p.77 を見よ。そこの Notation で $\Gamma_8=2Q_8$)。
$Q_8=\begin{pmatrix} M & {}^tq/2 \\ q/2 & 1 \end{pmatrix}$ の形に書き、$\widetilde{Q_8}=M-\frac{1}{4}{}^tqq$ とおく。このとき、

$$D^*_6(s;+1)=\zeta(-5)\sum_{n=1}^{\infty}\sharp\{X\in\mathbb{Z}^7 \mid {}^tX(4\widetilde{Q_8})X=n\}\cdot n^{-s}$$

このことの根拠は、$k=4$ のとき $\dim J_{4,1}=1$ であり、$E_{4,1}(\tau,z)=\theta_{Q_8}(\tau,z)$ による。
$4\mid k$ ならば zeta 関数 $D^*_{2k-2}(s;+1)$ は上の型の 2 次形式の zeta 関数の有限和で書ける。それは Eisenstein 級数 $E_{k,1}(\tau,z)$ が Jacobi 形式の場合の Siegel formula により theta 級数の 1 次結合で表わせることによる ([Ar2] 参照)。

例 2 $k=5$ のとき

$$D^*_8(s;+1)=\zeta(-7)\sum_{n=1}^{\infty}\sharp\left\{X\in\mathbb{Z}^9 \,\middle|\, {}^tX\begin{pmatrix} 4\widetilde{Q_8} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}X=n\right\}\cdot n^{-s}$$

である。これは $\dim_{\mathbb{C}}J^{skew}_{5,1}=1$ による。同様に
$k\equiv 1 \bmod 4$ のとき、$D^*_{2k-2}(s;+1)$ は上の型の 2 次形式の zeta 関数の有限和で書ける。

参考文献

[Ar1] Arakawa, T.: Special values of L-functions associated with the space of quadratic forms and the representations of $Sp(2n, F_p)$ in the space of Siegel cusp forms, Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, 1989, 99-169.

[Ar2] Arakawa, T.: Siegel's formula for Jacobi forms, International Journ. of. Math. **4** (1993), 689-719.

[Ch] Christian, U.: Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. reine angew. Math. **277** (1975), 130-154; Zur Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. reine angew. Math. **296** (1977), 108-118.

[Co] Cohen, H.: Sums invoving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, Math. Ann. **217** (1975), 271-285.

[E-Z] Eichler, M. and Zagier, D.: The Theory of Jacobi forms, Birkhäuser, 1985.

[Go] Godement, R.: in Fonctions Automorphes, Séminaire H. Cartan, 1957-1958.

[I-S1] Ibukiyama, T. and Saito, H.: On zeta functions associated to symmetric matrices and an explicit conjecture on dimensions of Siegel modular forms of general degree, Int. Math. Research Notices No.8, Duke Math. J. **67** (1992), 161-169.

[I-S2] Ibukiyama, T. and Saito, H.: On zeta functions associated to symmetric matrices I, An explicit form of zeta functions, preprint.

[Ko] Kohnen, W.: Modular forms of half integral weight on $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. **248** (1980), 249-266.

[Mo] Morita, Y.: An explicit formula for the dimensions of spaces of Siegel modular forms of degree two, J. Fac. Sci.Univ. Tokyo Sect. IA **21** (1974), 167-248.

[Shm1] Shimura, G.: Modular forms of half integral weight, in Modular functions of one variable, I. Lecture Notes in Math. vol. **320** (1973), 57-74, Springer.

[Shm2] Shimura, G.: On modular forms of half integral weight, Ann. Math. **97** (1973), 440-481.

[Shn] Shintani, T.: On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA **22** (1975), 25-65.

[Sk1] Skoruppa, N.-P.: Developments in the theory of Jacobi forms, International Conf. Automorphic Functions and their Applications, Khabarovsk, 1988, ed. N. Kuznetsov and V. Bykovsky, pp. 167-185, USSR Academy of Science, 1990.

[Sk2] Skoruppa, N.-P.: Explicit formulas for the Fourier coefficients of Jacobi and elliptic modular forms, Invent. Math. **102** (1990), 501-520.

[Tsu] Tsushima, R.: A formula for the dimension of spaces of Siegel cusp forms of degree three, Amer. J. Math. **102** (1980), 937-977.

[Ya] Yamazaki, T.: On Siegel modular forms of degree two, Amer. J. Math. **98** (1976), 39-53.